МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ЛИПЕЦКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Факультет автоматизации и информатики

Кафедра автоматизированных систем управления

Домашняя работа №5

по математическому программированию

Студент АС-21-1 \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Станиславчук С. М.

(подпись, дата)

Руководитель \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ Качановский Ю. П.

(подпись, дата)

Липецк 2023

**1. Задание**

Задача 1. Найти минимум (максимум) целевой функции при заданных ограничениях

Вариант: 2

f(x) = x\_1 + x\_2

при ограничениях

h\_1(x) = x^2\_1 +x^2\_2 = 1

**Решение**

Функция Лагранжа:

L(x, λ) = f(x) + λ(h(x) – 1) = x\_1 + x\_2 + λ(x^2\_1 + x^2\_2)

Частные производные:

dL / dx\_1 = 1 + 2λx\_1

dL / dx\_2 = 1 + 2λx\_2

dL / dλ = x^2\_1 + x^2\_2

Запишем общую систему:

{1 + 2λx\_1 = 0

{1 + 2λx\_2 = 0

{x^2\_1 + x^2\_2 = 1

Выразим каждую переменную:

{2λx\_1 = -1 {x\_1 = -1/2λ

{2λx\_2 = -1 {x\_2 = -1/2λ

{(-1/2λ)^2 + (-1/2λ)^2 = 1

Отсюда λ = +- sqrt(2)/2

Для того, чтобы понять какое значение из этих двух использовать в дальнейших вычислениях x\_1 и x\_2, возьмем вторые производные по каждой переменной:

(d^2L)/(dx^2\_1) = 2λ

(d^2L)/(dx^2\_2) = 2λ

(d^2L)/(dλ^2) = 0

(d^2L)/(dx\_1 dx\_2) = 0

(d^2L)/(dx\_2 dx\_1) = 0

Теперь сгенерируем Гессиан:

H = [ 2λ 0 ]

[ 0 2λ ]

Отсюда её определитель:

D = 4λ^2

Теперь, чтобы определить характер точек λ, нужно рассмотреть значения вторых производных:

при λ = sqrt(2)/2: (d^2L)/(dx^2\_1) = (d^2L)/(dx^2\_2) = 2λ = sqrt(2) > 0 – минимум

при λ = -sqrt(2)/2: (d^2L)/(dx^2\_1) = (d^2L)/(dx^2\_2) = 2λ = -sqrt(2) < 0 – максимум

Мы в нашей задаче ищем что? - минимум (максимум).

Для минимума:

x\_1\_min = -1/(2λ) = -1/(2\*(sqrt(2)/2)) = -sqrt(2)/2

x\_2\_min = -1/(2λ) = -1/(2\*(sqrt(2)/2)) = -sqrt(2)/2

Для максимума:

x\_1\_max = -1/(2λ) = -1/(2\*(-sqrt(2)/2)) = sqrt(2)/2

x\_2\_max = -1/(2λ) = -1/(2\*(-sqrt(2)/2)) = sqrt(2)/2

точка минимума (-0.707, -0.707), точка максимума (0.707, 0.707)

f\_min = -sqrt(2)/2 – sqrt(2)/2 = -sqrt(2)

f\_max = sqrt(2)/2 + sqrt(2)/2 = sqrt(2)

**Ответ:**f\_min = -sqrt(2)  
f\_max = sqrt(2)

**Задача 2**

Найти минимум (максимум) целевой функции:  
f(x\_1, x\_2)=1/3(x\_1+1)^2+x\_2

при заданных ограничениях:  
g\_1(x\_1) = x\_1 – 1 >= 0  
g\_2(x\_2) = x\_2 >= 0

**Решение**

Перед нами стоит задача решить случай, когда система ограничений содержит только неравенства

Найдем стационарные точки **безусловного** экстремума функции. Для этого определим частные производные и приравняет их к нулю. В результате получим систему 2ух уравнений относительно двух переменных

f(x\_1, x\_2) = 1/3(x\_1+1)^2+x\_2

Теперь найдем частные производные:

{(dL)/(dx\_1) = 2/3\*(x\_1+1)

{(dL)/(dx\_2) = 1

Решим полученную систему

{2/3\*(x\_1+1) = 0 x\_1 = -1

{x\_2 = 0 x\_2 = 0

f(-1, 0) = 0

Так как 0 >= 0, но -1 < 1 (из неравенств g) => точка (-1, 0) не лежит внутри области.

Теперь строим функцию Лагранжа для ограничения x\_1 >= 1:

L(x\_1, x\_2, λ) = 1/3(x\_1+1)^2+x\_2+ λ\*(x\_1-1)

Вычислим частные производные функции и приравняем их к нулю

{dL/dx\_1 = 2/3\*(x\_1+1) + λ = 0 -> {2/3\*(1+1) + λ = 0,

{dL/dx\_2 = 1 λ = -4/3, x\_1 = 1, x\_2 = 0

{dL/dλ = x\_1-1 = 0

Данная точка (1, 0) удовлетворяет всем ограничениям

Рассмотрим ограничение x\_2 >= 0. Функция Лагранжа в этом случае примет вид:

L(x\_1, x\_2, λ) = 1/3(x\_1+1)^2+x\_2 + λ\*x\_2 λ = -1, x\_1 = -1, x\_2 = 0

{dL/dx\_1 = 2/3\*(x\_1+1) = 0

{dL/dx\_2 = 1 + λ = 0

{dL/dλ = x\_2 = 0

Данная точка (-1, 0) не удовлетворяет ограничению (1)

Проверим достаточное условие минимума для точки (1, 0), так как она удовлетворяет всем ограничениям.

Вычислим вторую производную по x\_1:

(d^2L/dx\_1^2) = 2/3 > 0

Так как вторая производная положительна, точка (1, 0) - является точкой минимума.

f (1, 0) = 4/3 – минимум целевой функции, а точка (1, 0) – является точкой минимума

Ответ: f\_min = 4/3